# 行政院國家科學委員會專題研究計畫　成果報告

## 利用上記錄值對 Weibull 分配的參數做統計推論(2/2)

計畫類別：個別型計畫
計畫編號：NSC91-2118-M-032-005-
執行期間：91 年 08 月 01 日至 92 年 07 月 31 日
執行單位：淡江大學統計學系(所)


計畫主持人：吳忠武

計畫參與人員：曾小喬，黃欣盈


報告類型：完整報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中　華　民　國 92 年 10 月 24 日

# 行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告

## 利用上記錄值對 Weibull 分配的參數做統計推論（2/2）

計劃編號：NSC91-2118-M-032-005
執行期限：91 年 8 月 1 日至 92 年 7 月 31 日
主持人：吳忠武　研究生：曾小喬、黃欣盈　執行機構及單位名稱：淡江大學統計學系

### 一、中文摘要

本文最主要的目的有兩個，第一，我們將利用 Weibull 分配的前 $n$+1 個上記錄值（upper record value）來建立參數（δ,θ）的真正聯合信賴區域（exact joint confidence region）並且定義一個準則（如聯合信賴區域面積最小）來找出一個最佳的（δ,θ）之真正聯合信賴區域。第二，我們仍然利用此前 $n$+1 個上記錄值並且提出一些樞紐量（pivotal quantity）對其形狀參數（shape parameter）做假設檢定和建立其信賴區間。

最後，我們也給幾個例子和做一些蒙地卡羅模擬來評估這些樞紐量在給定信賴水準下，對形狀參數所建立的信賴區間，那一個信賴區間的平均區間長度較短；而也評估利用這些樞紐量在給定的顯著水準下，對形狀參數做假設檢定，那一個樞紐量提供的檢定統計量較為有效力。

### Abstract

This paper has two part: The first parts, we use the first $n$+1th upper record values of the Weibull distribution to establish exact joint confidence regions of the parameters δ and θ. Moreover ,we give a criterion(smallest area of confidence regions) to find the optimal exact joint confidence of and θ. The second part, we still use the first $n$+1th upper record values and provide some pivotal quantities to test and establish confidence interval of the shaper parameter.

Finally, we give some examples and the Monte Carlo simulation to assess the behaviors (including higher power and more shorter length of confidence interval) of these pivotal quantities for testing null hypotheses under given significance level α and establishing confidence interval of the shape parameter under the confidence coefficient 1-α.

**Keywords:** Weibull distribution; upper record values; Shape parameter; Confidence interval; confidence region ;Monte Carlo simulation; pivotal quantity; hypotheses testing.

### 二、緣由與目的

在現實的生活中，我們身邊經常發現記錄值（record value），例如氣溫的變化、運動競賽成績的預測、經濟學及壽命檢定的研究等等。過去幾年，許多學者已經探討記錄值及其相關的研究如機率、估計和分配的特徵值等等，但是在參數的統計推論上卻少有著墨。近年來 Chen（1997a,b,1998）對 Weibull 分配做關於右型 II 設限下參數的區間估計與假設檢定，因此，本文延伸 Chen 的概念，我們提出一些新的樞紐量來探討參數之統計推論，包括了形狀參數與尺度參數真正聯合信賴區域、形狀參數的信賴區間及假設檢定。

令 $Y_1$, $Y_2$,…, $Y_n$,...為一組來自具有形狀參數和尺度參數分別為 δ 與 θ 的 Weibull 分配之隨機樣本序列，而 $X_i$ 的機率密度函數（pdf）與累積分配函數（cdf）之型式分別為

$$f(y)=\left(\frac{\delta}{\theta^{\delta}}\right)y^{\delta-1}exp\left\{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\delta}\right\}\ , \qquad (1\text{-}1)$$

$$F(y)=1-exp\left\{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\delta}\right\}, \qquad (1\text{-}2)$$

其中 $y_i>0$，$i$ = 1,2,…，而參數範圍為 δ > 0 與 θ

$>0$。因此，若有另一組隨機樣本 $X_i = (Y_i/\theta)^{\delta}$， $i = 1,2,\ldots$，則 $Y_i = \theta X_i^{\frac{1}{\delta}}$，$i = 1,2,\ldots$。所以對(1.1)式做變數變換，則我們可得到 $X_i$ 之機率密度函數將為

$$g(x) = exp(-x),\quad x>0, \qquad (1\text{-}3)$$

即 $X_i$ 將會是來自於標準的指數分配（standard exponential distribution）（亦即，Weibull 分配具有參數 θ = 1 和 δ = 1）的隨機變數。此外，因為 $X_i = (Y_i/\theta)^{\delta}$ 是隨著 $Y_i$ 遞增而嚴格遞增的函數，所以，若 $Y_{U(1)}< Y_{U(2)} <\ldots<Y_{U(n)}$ 為來自 Weibull 分配具有形狀參數和尺度參數 θ 和 δ 之前 $n$ 個上記錄值隨機樣本。其中，$U(n)$為顯示第 $n$ 個上記錄值 $Y_{U(n)}$ 發生的記錄時間，且 $U(n)=\min\{i|i>U(n-1), Y_i>Y_{U(n-1)}\}$，$n \geqq 2$，和 $U(1)=1$。令 $X_{U(i)} = (Y_{U(i)}/\theta)^{\delta}$，則 $X_{U(1)}<X_{U(2)}<\ldots<X_{U(n)}$將會是來自於標準指數分配相對應的前 $n$ 個上記錄值。

在此，我們所考慮的樣本型態是上記錄值樣本。因此，我們的樣本假設是針對來自 Weibull 分配具有參數 θ 和 δ 的一組樣本大小為 $n$ 的上記錄樣本其為 $Y_{U(1)}< Y_{U(2)} <\ldots<Y_{U(n)}$，其中 $U(n)=\min\{i|i>U(n-1), Y_i>Y_{U(n-1)}\}$，$n \geqq 2$，和 $U(1)=1$。假設定義隨機變數

$$\xi_i = \frac{\left(\left(Y_{U(n)}\right)^{\delta} - \left(Y_{U(i)}\right)^{\delta}\right)/(n-i)}{\left(Y_{U(i)}\right)^{\delta}/i},\ i=1,2,..,n-1 \qquad (1\text{-}4)$$

和

$$\eta = 2\left(Y_{U(n)}/\theta\right)^{\delta}。 \qquad (1\text{-}5)$$

因為 Weibull 分配的上記錄值 $Y_{U(n)}$，可以透過變數變換的程序，即 $X_{U(i)} = (Y_{U(i)}/\theta)^{\delta}$，得到標準指數分配的上記錄值，則我們可以證得 $\xi_i$，$i=1,2,\ldots n-1$，和 $\eta$ 彼此互相獨立，且 $\xi_i$ 具有 F 分配，自由度為$(2(n-i),2i)$和 η 具有卡方分配，自由度為 $2(n)$。因此，我們可以利用 $\xi_i$ 及 η 來建立參數（δ，θ）的真正聯合信賴區域，即

$$\frac{\log\left\{\left(\frac{n-i}{i}\right)F_{2(n-i),2i}^{\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)/2}+1\right\}}{\log\left(\frac{Y_{U(n)}}{Y_{U(i)}}\right)} < \delta < \frac{\log\left\{\left(\frac{n-i}{i}\right)F_{2(n-i),2i}^{\left(1-\sqrt{1-\alpha}\right)/2}+1\right\}}{\log\left(\frac{Y_{U(n)}}{Y_{U(i)}}\right)} \qquad (1\text{-}6)$$

與

$$Y_{U(n)}\left(\frac{\chi_{2n}^{2\left(1+\sqrt{1-\alpha}\right)/2}}{2}\right)^{-\frac{1}{\delta}} < \theta < Y_{U(n)}\left(\frac{\chi_{2n}^{2\left(1-\sqrt{1-\alpha}\right)/2}}{2}\right)^{-\frac{1}{\delta}} \qquad (1\text{-}7)$$

為參數 δ 與 θ 之 100(1-α)%的聯合信賴區域，$i=1,2,\ldots,n-1$。

再者，Weibull 分配所對應的失敗率函數（failure rate function）為

$$h(x) = \left(\frac{\delta}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\delta-1}, \qquad (1\text{-}8)$$

同樣地，$x_i > 0$，$i = 1,2,\ldots,n$，而參數範圍為 δ > 0 與 θ > 0。當 δ > 1 時，$h(x)$是 $x$ 的遞增函數；當 δ = 1 時，$h(x) = \left(\frac{1}{\theta}\right)$（為常數）；當 δ < 1 時，$h(x)$是 $x$ 的遞減函數。而且 δ =1 和 δ =2 時，韋伯分配其實是指數分配和 Rayleigh 分配。所以，形狀參數 δ 是決定韋伯分配形狀很重要的依據。因此，我們只針對會影響失敗率函數形狀的形狀參數 δ 做統計推論。可以利用(1-4)式為樞紐量（pivotal quantity）對形狀參數 δ 來做假設檢定與建立信賴區間。另外，定義

$$W(\delta;n) = \frac{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{U(i)}\right)^{\delta}\right]}{\left[\prod_{j=1}^{n}\left(Y_{U(j)}\right)\right]^{\frac{\delta}{n}}}, \qquad (1\text{-}9)$$

我們可以證明(1-9)的分配是和（δ, θ）並無相關。因此，它也對 δ 可以提供一個樞紐量，讓 $W_{\alpha}(n)$表示 $W(\delta;n)$的分配之上 α 臨界值（upper α critical value），則對任意 0 < α < 1

$$P\left(W_{1-\alpha/2}(n) < W(\delta;n) < W_{\alpha/2}(n)\right) = 1-\alpha。$$

假設 $Y_{U(1)}< Y_{U(2)} <\ldots<Y_{U(n)}$如上面定義為來自 Weibull 分配具有形狀參數和尺度參數分別為 θ 和 δ 的一組大小為 $n$ 的上記錄值樣本。而且讓 $W(\delta;n)$和 $W_{\alpha}(n)$如前定義。則對假設檢定

$$H_0: \delta = \delta_0 \quad \text{vs.} \quad H_a: \delta \neq \delta_0$$

的決策原則為假如 $W(\delta_0;n)> W_{\alpha/2}(n)$或 $W(\delta_0;n)< W_{1-\alpha/2}(n)$，則拒絕 $H_0: \delta=\delta_0$。

因為 $W(\delta;n)$的分配不易求得，所以可以藉著蒙地卡羅（Monte Carlo）模擬求得其百分位數（percentile）。其中樞紐量的分配與形狀參數 δ 無關，所以，我們將樞紐量中未知的參數以 δ = 1 和 θ =1 代入，在此我們重覆的次數為 60 萬次，可以得到樞紐量 $W(\delta;n)$的上 α 臨界值。

進一步，我們也證明對任意 $t > 1$，方程式

$$W(\delta;n) = t。 \qquad (1\text{-}10)$$

在 δ > 0 時，有一個 δ 的唯一解。因此，我們可以利用上面定義的前 $n$ 個上記錄值樣本 $Y_{U(1)} < Y_{U(2)} < \ldots < Y_{U(n)}$，則我們可以建立形狀參數 δ 的 100(1-α)% 雙尾信賴區間（$\delta_L^W, \delta_U^W$），其中 $\delta_L^W$ 和 $\delta_U^W$ 分別是方程式

$$W(\delta_L^W; n) = W_{1-\alpha/2}(n), \qquad (1\text{-}11)$$

和

$$W(\delta_U^W; n) = W_{\alpha/2}(n), \qquad (1\text{-}12)$$

中 δ 的唯一解。

同樣地，我們也證得對任意 $t>0$，下列方程式

$$\xi(\delta; n, j) = \xi_j = t, \qquad (1\text{-}13)$$

其中 $j=1,2,\ldots n-1$。在 δ > 0 時，皆有一個 δ 的唯一解。我們可以建立形狀參數 δ 的 100(1-α)% 雙尾信賴區間（$\delta_L^j, \delta_U^j$），其中

$$\delta_L^j = \frac{\log\left\{\left(\frac{n-j}{j}\right)F_{2(n-j),2j}^{(1-\alpha/2)} + 1\right\}}{\log\left(\frac{Y_{U(n)}}{Y_{U(j)}}\right)} \qquad (1\text{-}14)$$

和

$$\delta_U^j = \frac{\log\left\{\left(\frac{n-j}{j}\right)F_{2(n-j),2j}^{\alpha/2} + 1\right\}}{\log\left(\frac{Y_{U(n)}}{Y_{U(j)}}\right)}, \qquad (1\text{-}15)$$

$j=1,2,\ldots n-1$。

我們將模擬分成兩個部份，第一部分為在給定信賴係數為 1-α=0.95 之下，針對不同的參數值、樣本數，只模擬出參數 δ 的信賴區間之信賴係數的估計值，求出其樣本均方差(smse)、平均數（mean）與標準差（sd），以及參數 δ 的信賴區間之平均長度，並與 1-α 來比較。

我們考慮了當參數( δ , θ )=(0.5,1)、(1,1)、(2,1)、(0.5,2)、(1,2)及(2,2)。在每一種情形下模擬之信賴係數 1-α 的估計平均值很接近 1-α 的真實值，而且標準差之值都小到小數點兩位以下，樣本均方差的值也小到小數點四位以下。在區間估計長度的比較上，當記錄值的樣本為 $n$ 時，樞紐量 $\xi_k$ 所產生的區間估計之平均長度較短及，其中 $k = [n/5]$ 或 $[n/5]+1$。([ ] 代表高斯符號)（**詳細內容參見黃欣盈之碩士論文**）。

接著，在給定信賴係數為 1-α=0.95 之下，針對不同的參數值、樣本數，只模擬出參數( δ , θ )的聯合信賴區間之信賴係數的估計值，求出其樣本均方差(smse)、平均數（mean）與標準差（sd），以及參數( δ , θ )聯合信賴區域之平均面積，並與 1-α 來比較。考慮了當參數( δ , θ )=(0.5,1)、(1,1)、(2,1)、(0.5,2)、(1,2)及(2,2)。在每一種情形下模擬之信賴係數 1-α 的估計平均值很接近 1-α 的真實值，而且標準差之值都小到小數點兩位以下，樣本均方差的值也小到小數點四位以下。在區間估計長度的比較上，當記錄值的樣本 $n$ 時，樞紐量 $\xi_k$ 所產生的聯合信賴區域面積之平均較小，其中 $k = [n/5]$ 或 $[n/5]+1$ ([ ] 代表高斯符號)。(**詳細內容參見黃欣盈之碩士論文**)。

第二部分為利用(1-4)式與(1-9)式所提到的樞紐量來檢定 $H_0$: δ =1 vs. $H_a$: δ ≠1，並且利用蒙地卡羅模擬的方式來比較各個樞紐量的檢定力。在給定顯著水準 α = 0.1、尺度參數 θ = 1 及形狀參數 δ 分別為 0.2、0.4、0.6、0.8，1、1.2、1.4、1.6、1.8、3、4 之下，我們可以發現不論在哪一個樣本數下，$W(\delta;n)$的檢定力高於其他樞紐量的檢定力。(**詳細內容參見曾小喬之碩士論文**)。

進一步，在各個樞紐量在 δ = 1 和 θ = 1 及不同之記錄值之樣本數的組合之下，建立形狀參數 δ 之 90%信賴區間之平均區間長度。我們可以發現，當 $n$ =2 至 30 時，皆是$W(\delta;n)$的信賴區間平均長度最短。(**詳細內容參見曾小喬之碩士論文**)。

最後，我們將舉出兩個數值實例來說明（δ , θ）的真正聯合信賴區域及參數 δ 的假設檢定如何的應用。其中，例子 1 針對 Roberts(1979) 在加州長海灘收集到二氧化硫濃度的資料來說明（δ , θ）的真正聯合信賴區域。例子 2 是以模擬資料為例，說明參數 δ 的信賴區間及假設檢定。

例子 1：

學者 Roberts(1979) 從 1956 年至 1974 年，每年十月觀察一次，在加州長海灘收集到二氧化

硫濃度的上記錄值樣本，分別為以下四筆資料 26，27，40，41。而且學者 Roberts 假設這四筆資料是來自 Weibull 分配的隨機變數，因此我們利用這些資料來說明形狀參數 δ 的信賴區間及參數( δ , θ )的 1- α 聯合信賴區域。我們利用 (1-6)、(1-7)、(1-14) 及 (1-15) 式可以去求得參數 δ 的 95％信賴區間上界及下界分別為 (0.1616,2.2329)、(0.10087,2.76172) 及 (0.062443,3.09727) 與參數( δ , θ )的 90％聯合信賴區域為分別 0.582599<δ<11.995501，

$$41\times\left(\frac{19.4433}{2}\right)^{-\frac{1}{\theta}}<\theta<41\times\left(\frac{1.7670}{2}\right)^{-\frac{1}{\theta}}$$ ；

0.271934<δ<6.490455，

$$41\times\left(\frac{19.4433}{2}\right)^{-\frac{1}{\theta}}<\theta<41\times\left(\frac{1.7670}{2}\right)^{-\frac{1}{\theta}}$$ 及

0.172424<δ<58.98228，

$$41\times\left(\frac{19.4433}{2}\right)^{-\frac{1}{\theta}}<\theta<41\times\left(\frac{1.7670}{2}\right)^{-\frac{1}{\theta}}$$ 。

例子 2：

考慮來自於具有韋伯分配且參數 δ =1， θ =1 之觀測值，資料如下：

1.54941, 1.00276, 0.06714, 0.35120, 0.71134, 2.53331, 3.86274, 0.11499, 0.91678, 0.70955, 0.23940, 4.73105, 1.65966, 2.26610, 1.29632, 0.15224。

我們可以得到樣本數為 4 的上記錄值樣本如下: 1.54941, 2.53331, 3.86274, 4.73105。

因此，在顯著水準 α =0.1 之下，檢定 $H_0: \delta=1$ *vs.* $H_a: \delta\neq 1$，並且將所得到的 4 個上記錄值樣本及 δ =1，代入 (1-4) 式與 (1-9) 式中，可求得 4 個樞紐量的值：

$W(\delta;4)$=1.07264、 $\xi(\delta;4,1)$=0.55038、 $\xi(\delta;4,2)$=0.62148、 $\xi(\delta;4,3)$=0.29001

再由附錄表一及 F 值表所查得各樞紐量的下界及上界分別如下：

$W_{0.95}(4)$=1.01614，$W_{0.05}(4)$=2.22111；

$F_{6,2}^{(0.95)}$=0.19443，$F_{6,2}^{(0.05)}$=19.32953；

$F_{4,4}^{(0.95)}$=0.15654，$F_{4,4}^{(0.05)}$=6.38823；

$F_{2,6}^{(0.95)}$=0.05173，$F_{2,6}^{(0.05)}$=5.14325。

因此，由於這 4 個樞紐量的值，皆落於接受域中，因此我們不能拒絕虛無假設 $H_0: \delta=1$。

我們也可利用上述的 4 個上記錄值與此節的估計方法來建立形狀參數 $\delta$ 的區間估計。假設我們信賴係數 1- α 為 0.9，則可得形狀參數 $\delta$ 之 90％的雙尾信賴區間而求解過程如下：

首先利用之前所查得 4 個樞紐量的下界與上界，代入 (1-11) 式至 (1-12) 式及 (1-14) 式至 (1-15) 式，可得到下列的方程式：

$$W(\delta_L^W;4)=W_{0.95}(4)$$

和

$$W(\delta_U^W;4)=W_{0.05}(4)$$

及

$$\delta_L^j=\frac{\log\left\{\left(\frac{4-j}{j}\right)F_{2(4-j),2j}^{(1-\alpha/2)}+1\right\}}{\log\left(\frac{Y_{U(4)}}{Y_{U(j)}}\right)}$$

和

$$\delta_L^j=\frac{\log\left\{\left(\frac{4-j}{j}\right)F_{2(4-j),2j}^{(\alpha/2)}+1\right\}}{\log\left(\frac{Y_{U(4)}}{Y_{U(j)}}\right)},$$

其中，$j=1,2,3$。其次，我們可利用這 4 個樞紐量 $W(\delta;4)$、 $\xi(\delta;4,1)$、 $\xi(\delta;4,2)$和 $\xi(\delta;4,3)$求得參數 δ 之 90％信賴區間的下界和上界分別為 (0.42360, 3.49606)、(0.41164, 3.65264)、(0.23283, 3.20177) 及 (0.84321, 4.92467)。

## 三、結果與討論

在前述的探討中，我們提出了針對 Weibull 分配在上記錄值樣本下建立參數（δ , θ）的真正聯合信賴區域、形狀參數的統計檢定及賴區間估計式。而從電腦模擬及數值實例中，我們可歸納出下列結果：

對 Weibull 分配而言，本文所提出的區間估計方法可適用於各種情況，不論樣本數的大小或是 $j$ 如何變動，我們提出的方法都具有良好的準確度與精確度。在檢定力的部分，當上記錄值的樣本數 $n$ =2 時，任何一個樞紐量的檢定力都偏低。總體來說，樞紐量 $\xi(\delta;n,j)$ 的檢定力都是較低，而 $W(\delta;n)$ 的檢定力高於其他樞紐量的檢定力。在參數( δ , θ )的聯合信賴區域的部分，我們可以發現，較小的聯合信賴區域面積之平均較會

隨著樣本數大小改變。在信賴區間得部分，當 $n$ =2 至 30 時，皆是 $W(\delta;n)$ 的信賴區間平均長度最短。

## 四、計劃成果自評

就整體來說，在聯合信賴區域估計方面，我們所提出的方法都適用 Weibull 分配。在檢定力比較方面，我們提出檢定統計量中，不論在哪一個樣本數下，$W(\delta;n)$ 的檢定力高於其他樞紐量的檢定力；而在其信賴區間之平均區間長度的比較方面，皆是 $W(\delta;n)$ 的信賴區間平均長度最短。

## 五、附錄

表一 對具有韋伯分配在上記錄值下，$W(\delta;n)$ 樞紐量之百分位數表

$$P\{W(\delta;n) \le W_{\alpha}(n)\} = 1-\alpha$$

| | α | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 0.99500 | 0.99000 | 0.97500 | 0.95000 | 0.90000 |
| 2 | 1.00000 | 1.00001 | 1.00008 | 1.00033 | 1.00139 |
| 3 | 1.00049 | 1.00102 | 1.00272 | 1.00587 | 1.01325 |
| 4 | 1.00270 | 1.00451 | 1.00916 | 1.01614 | 1.02973 |
| 5 | 1.00645 | 1.00974 | 1.01730 | 1.02755 | 1.04576 |
| 6 | 1.01115 | 1.01585 | 1.02596 | 1.03884 | 1.06034 |
| 7 | 1.01631 | 1.02227 | 1.03450 | 1.04952 | 1.07351 |
| 8 | 1.02173 | 1.02875 | 1.04271 | 1.05925 | 1.08507 |
| 9 | 1.02709 | 1.03502 | 1.05049 | 1.06827 | 1.09540 |
| 10 | 1.03248 | 1.04125 | 1.05799 | 1.07673 | 1.10476 |
| 11 | 1.03759 | 1.04709 | 1.06475 | 1.08435 | 1.11322 |
| 12 | 1.04273 | 1.05275 | 1.07124 | 1.09146 | 1.12086 |
| 13 | 1.04759 | 1.05828 | 1.07741 | 1.09820 | 1.12792 |
| 14 | 1.05225 | 1.06331 | 1.08314 | 1.10428 | 1.13433 |
| 15 | 1.05679 | 1.06815 | 1.08843 | 1.10989 | 1.14014 |
| 16 | 1.06120 | 1.07290 | 1.09354 | 1.11530 | 1.14571 |
| 17 | 1.06534 | 1.07730 | 1.09825 | 1.12021 | 1.15064 |
| 18 | 1.06945 | 1.08170 | 1.10298 | 1.12501 | 1.15544 |
| 19 | 1.07321 | 1.08569 | 1.10726 | 1.12940 | 1.15978 |
| 20 | 1.07697 | 1.08965 | 1.11145 | 1.13377 | 1.16403 |
| 21 | 1.08067 | 1.09333 | 1.11529 | 1.13762 | 1.16788 |
| 22 | 1.08393 | 1.09684 | 1.11887 | 1.14131 | 1.17152 |
| 23 | 1.08725 | 1.10023 | 1.12242 | 1.14479 | 1.17492 |
| 24 | 1.09045 | 1.10363 | 1.12587 | 1.14827 | 1.17824 |
| 25 | 1.09354 | 1.10687 | 1.12907 | 1.15146 | 1.18130 |
| 26 | 1.09660 | 1.10980 | 1.13227 | 1.15458 | 1.18425 |
| 27 | 1.09936 | 1.11272 | 1.13523 | 1.15752 | 1.18703 |
| 28 | 1.10200 | 1.11555 | 1.13808 | 1.16024 | 1.18965 |
| 29 | 1.10482 | 1.11832 | 1.14082 | 1.16297 | 1.19221 |
| 30 | 1.10752 | 1.12099 | 1.14352 | 1.16568 | 1.19468 |

表一(續)

| | α | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 0.10000 | 0.05000 | 0.02500 | 0.01000 | 0.00500 |
| 2 | 1.73706 | 2.34346 | 3.23334 | 5.02610 | 7.09852 |
| 3 | 1.84062 | 2.32646 | 2.95591 | 4.07378 | 5.18567 |
| 4 | 1.83123 | 2.22111 | 2.69333 | 3.47652 | 4.20730 |
| 5 | 1.80521 | 2.13021 | 2.50941 | 3.10440 | 3.64019 |
| 6 | 1.77725 | 2.05672 | 2.37274 | 2.85611 | 3.28060 |
| 7 | 1.75334 | 1.99938 | 2.27101 | 2.67933 | 3.03019 |
| 8 | 1.73106 | 1.95258 | 2.19278 | 2.54660 | 2.84574 |
| 9 | 1.71228 | 1.91359 | 2.12977 | 2.44224 | 2.70379 |
| 10 | 1.69537 | 1.88072 | 2.07608 | 2.35701 | 2.58655 |
| 11 | 1.68051 | 1.85185 | 2.03202 | 2.28639 | 2.49217 |
| 12 | 1.66732 | 1.82735 | 1.99425 | 2.22716 | 2.41819 |
| 13 | 1.65631 | 1.80690 | 1.96216 | 2.17895 | 2.35070 |
| 14 | 1.64549 | 1.78759 | 1.93385 | 2.13491 | 2.29749 |
| 15 | 1.63609 | 1.77132 | 1.90832 | 2.09741 | 2.24647 |
| 16 | 1.62720 | 1.75580 | 1.88602 | 2.06281 | 2.20314 |
| 17 | 1.61882 | 1.74166 | 1.86589 | 2.03347 | 2.16608 |
| 18 | 1.61167 | 1.72928 | 1.84786 | 2.00762 | 2.13239 |
| 19 | 1.60489 | 1.71836 | 1.83176 | 1.98460 | 2.10299 |
| 20 | 1.59883 | 1.70814 | 1.81735 | 1.96354 | 2.07594 |
| 21 | 1.59289 | 1.69809 | 1.80265 | 1.94175 | 2.04957 |
| 22 | 1.58753 | 1.68902 | 1.78975 | 1.92395 | 2.02644 |
| 23 | 1.58224 | 1.68073 | 1.77836 | 1.90818 | 2.00659 |
| 24 | 1.57747 | 1.67306 | 1.76698 | 1.89100 | 1.98596 |
| 25 | 1.57279 | 1.66571 | 1.75661 | 1.87704 | 1.96883 |
| 26 | 1.56898 | 1.65908 | 1.74734 | 1.86374 | 1.95254 |
| 27 | 1.56452 | 1.65237 | 1.73805 | 1.85118 | 1.93709 |
| 28 | 1.56084 | 1.64645 | 1.72984 | 1.83971 | 1.92201 |
| 29 | 1.55726 | 1.64079 | 1.72170 | 1.82848 | 1.90791 |
| 30 | 1.55372 | 1.63515 | 1.71421 | 1.81802 | 1.89635 |

## 六、參考文獻

### 英文部分


[1] Ahsanullah, M. (1980). ” Linear prediction of record values for the two parameter exponential distribution”. *Ann. Inst. Statist. Math.* 32, 363-368.

[2] Arnold ,B.C.,Balakrishnan,N.(1989) . ”Relations, Bounds and Approximations for Order Statistics”, *Lecture Notes in Statistics,* vol.53. Springer, New York.

[3] Arnold ,Barry C, N. Balakrishnan, H. N. Nagaraja (1998). *Records* ,John Wiley & Sons, Inc., New York.

[4] Bain,L.J.andEngelhardt, .(1992).”Introduction to probability and Mathematical Statistics”, Duxbury Press.

[5] Balakrishnan, N., Ahsanullah. M, Chan, P. S. (1995). On the logistic record values and

associated inference. *J. Appl. Statist. Sci.,* 2(3), 233-248
[6] Chao, A. and Hwang, S. J. (1986).”Comparison of confidence intervals for the parameters or Weibull and extreme distributions”, *IEEE Transactions on Reliabiliry*,35,111-113.
[7] Chan ,Ping-Shing(1998).” Interval estimation of location and scale parameters based on record values”, *Statistics & Probability Letters* ,37,49-58
[8] Chandler, K. N. (1952).” The distribution and freque1ncy of record values.”, *J. Roy. Staistt Ser. B* ,14, 220-228.
[9] Chen, Z. (1997a).”Statistical inference about the shape parameter of the Weibull distribution”, *Statistics & Probability Letters* , 36,85-90
[10] Chen, Z.(1997b). “Parameter estimation of the Gompertz population“*Biom. J.*, 39,pp.177-124
[11] Chen, Z. (1998).”Joint estimation for the parameters of Weibull distribution”. *Journal of Statistical Planning and inference*, 66, 113-120
[12] Cohen, A. C. and Whitten, B. J. (1988). *Parameter estimation in reliability and life span models* ,New York: Marcel Dekker.
[13] Dusmore, I. R. (1983).”The future occurrence of records”. *Ann. Inst. Statist. Math,* .35, 267-277.
[14] Franco, M. and Ruiz, J. M. (1996). ”On characterization of continuous distribution by conditional expectation of record of record values”, *Sankhyā* , Serirs A, 58, 135-141.
[15] Galambos, J. (1978). *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics.* Wiely, New York.
[16] Glick, N., (1978).” Breaking records and breaking boards” . *Amer. Math. Monthly*, 85,2-26
[17] Johnson, N. L., Kotz, S. and Baladrishnan, N. (1994). *Continuous univariate distribution,* Vol1, John Wiley & Sons, Inc., New York.
[18] Johnson, N. L., Kotz, S. and Baladrishnan, N. (1994). *Continuous univariate distribution*, Vol2, John Wiley & Sons, Inc., New York.
[19] Lawless, J.F.(1982). ”Statistical methods and methods for lifetime data”, John Wiley & Sons, Inc., New York.
[20] Nagaraja, H. N. (1977). ”On a characterization based on record values”, Austral. J. Statist., 19(1), 71-73
[21] Nagaraja, H. N., (1982).” *Record values and extreme value diatiution.* “*J, Appl. Probab.* , 19,233-239
[22] Nagaraja, H. N., (1984).”Asymptotic linear prediction of extreme order statistics”. *Ann. Inst. Probab.*, 19 , 233-239.
[23] Nagaraja, H. N., (1988). ”Record values and related statistics- a review”, *Commun. Statist.-Theoret. Methods,* 17(7),2223-2238.
[24] Resnick, S. I., (1973a). ”Record values and maxima”, *Ann. Probab,.* 1, 650-662.
[25] Resnick, S. I. (1973b). ”Extremal processes and record value times”, *J. Appl. Probab.,* 10, 864-868.
[26] Shorrock, R. W. (1972a). ”A limit theorem for inter-record times”, *J. Appl. Probab.,* 9, 219-223.
[27] Shorrock, R. W., (1972b).” On record values and record times”, *J. Appl. Prob.* , 9,316-326.
[28] Wu ,J. W., (1999). ”Characterizations of generalized mixtures of geometric and exponential distributions based on upper record values”, *Statistical Papers* , 42,123-133.
[29] Wu ,J. W. and Lee ,W. C. (1999). ”On characterizations of generalized mixtures of geometric and exponential distribution by conditional expectation of record values”, *J. Japan Statist. Soc.* ,*29* , No1, 99-104.
[30] Wu ,J. W. , 2000. ”Characterization of the finite mixture of exponential distributions by conditional moments of nonadjacent record values”, *J. Japan Statist. Soc.,* .30, No.1, 105-113.
[31] Wu ,J. W. and Lee ,W. C. (2001). ”On the characterization of generalized extreme values, power function, generalized Pareto and classical Pareto distributions by conditional expectation of record values”, *Statistical Papers,* 42, 225-242.

中文部分

[1] 黃欣盈, 藉著上記錄值探討韋伯分配與極值分配的參數的之區間估計, 台北：淡江大學統計系應用統計學碩士班碩士論文, 91 年。
[2] 曾小喬，藉著上記錄值探討韋伯分配與 Gompertz 分配之形狀參數的統計推論，台北：淡江大學統計系應用統計學碩士班碩士論文，91 年。